Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives

Exercice 1. Formules de Binet et équations des trajectoires.
1. $\frac{dr}{dt} = -C\frac{du}{d\theta}$
2. $u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mathcal{G}M}{C^2}$
3. équation polaire d'une conique de paramètre $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$ et d'excentricité $e = Ap$
avec les conditions initiales $C = r_0 v_0 \sin\alpha$
$E_m = \frac{\mathcal{G}mM}{2p}(e^2 - 1)$

Exercice 2. Vecteur de Runge-Lenz.
Il faut montrer que $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$
Choisissons $\vec{A}$ suivant Ox et Oz perpendiculaire au plan de la trajectoire et calculons
$\overrightarrow{OM}.\vec{A} = Ar\cos\theta$ donne bien $r = \frac{\frac{C^2}{\mathcal{G}M}}{1 + A\cos\theta}$ et $e = A = ||\vec{A}||$

Exercice 3. A propos de Spoutnik.
$2a \simeq 6968\,km$
$e \simeq 0,05$ trajectoire quasi circulaire
$p = a(1 - e^2) \simeq 6949\,km$
la 3e loi de Kepler donne $T \simeq 5783\,s$

Exercice 4. A propos des comètes (d'après concours).
1.
La trajectoire est elliptique d'après la 1re loi de Kepler et la périodicité du mouvement.
La 3e loi donne $a \simeq 2,7.10^9\,km$
$e = 1 - \frac{D}{a} \simeq 0,97$ (ellipse très allongée)
2.
a. on calcule $E_m = cte$ par exemple au périhélie $E_m = 0$ la trajectoire est parabolique
b. $v(r) = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_S}{r}}$
c. $e = 1$ et $p \simeq 150.10^6\,km$
$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $r_A = r_B = p = R_0$
d. $\varphi_A = \varphi_B = \frac{\pi}{4}$
e. il faut établir une équation différentielle qui relie l'angle et le temps :
$\vec{L}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mR_0v_0\vec{e}_z$ donne $t = \frac{R_0}{v_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4R_0}{3v_0} \simeq 77\,\text{jours}$