

Moment cinétique

Exercice 1. Théorème du moment cinétique appliqué au pendule simple.

1. $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$

2. Il faut que le fil résiste au moins à $T_{max} = mg(3 - 2 \cos \theta_0)$

Exercice 2. Mouvements d'une particule en contact avec une cuvette parabolique (d'après concours).

1.

a. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

b. $\vec{L}_O = m(r^2\dot{\theta}\vec{e}_z - rz\dot{\theta}\vec{e}_\theta + z\dot{r}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}z\vec{e}_r)$ et $L_{Oz} = mr^2\dot{\theta}$

c. $\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$ ce qui implique que $L_{Oz} = mr^2\dot{\theta} = cte = L$

2.

a. $E_k = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$

b. \vec{R} ne travaille pas et \vec{P} est une force conservative; $E_p = mg\frac{r^2}{a}$

c. $E_m = E_k + E_p = cte$

3.

a. $G(r) = 1 + \frac{4r^2}{a^2}$ et $E_{p,ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + mg\frac{r^2}{a}$

b. $r_m^4 = \frac{L^2 a}{2m^2 g}$

c. $E_{p,ef}(r_{min}) = E_{p,ef}(r_{max}) = E_m$

4.

a. $\theta = cte$

vitesse initiale dont la composante selon \vec{e}_θ est nulle.

b. $z = cte$

vitesse initiale $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{a}}$

c. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{8g}\left(1 + 4\frac{r_m^2}{a^2}\right)} \simeq 1,42 \text{ s}$

5. Diminution de l'énergie mécanique à cause des frottements.