Repérage d'un point - Vitesse et accélération

Exercice 1. Coordonnées cartésiennes.
$\vec{v} = (2 - \exp(-t))\vec{i} + (7 - 5\cos(t))\vec{j} - (1 + 3\sin(t))\vec{k}$
$\overrightarrow{OM} = (2t + \exp(-t))\vec{i} + (7t - 5\sin(t))\vec{j} - (t - 3\sin(t))\vec{k}$

Exercice 2. Accélération dépendant de la vitesse.
1. $v = \dfrac{v_0}{1 + kv_0 t}$
2. $x = \dfrac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t)$
3. $kx = ln(1 + kv_0 t) = \ln\dfrac{v_0}{v}$

Exercice 3. Accélération dépendant de la position.
$\dfrac{v^2}{2} = k\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right)$

Exercice 4. Torpille.
1.
2. $\sin\theta = \dfrac{v}{u}\sin\alpha$
3. $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \theta\,;\, tan\theta = \dfrac{v}{u}$

Exercice 5. Course automobile.
1. $9,5\,s$
2. $179,4\,m$
3. $v_A = 136,4\,km/h$ et $v_B = 152,5\,km/h$

Exercice 6. Mouvement rectiligne.
1.
2. d correspond à la surface sous la courbe $v(t)$
3. $v_1 = at\,;\, v_2 = v_{max}\,;\, v_3 = v_{max} - a(t - (t_1 + \tau))$
4. $\tau = 34\,s$ et $v_{max} = 85\,km/h$

Exercice 7. Distance de sécurité.
1. $v = \dfrac{v_1}{1 + \alpha v_1 t}$ et $x = \dfrac{1}{\alpha}\ln(1 + \alpha v_1 t)$
2. $v = v_1 e^{-\alpha x}$
3. $x_2 = v_2 t + d$
4. $t_0 = \dfrac{1}{\alpha v_1}\left(\dfrac{v_1}{v_2} - 1\right)$
5. $45,95\,m$

Exercice 8. Trajectoire parabolique.
1. $y = x^2 - 2x$
2. $v = 2\sqrt{5 + 16t^2 - 16t}$
3. $\vec{a} = 8\vec{e}_y\,;\, a_T = 16\dfrac{2t - 1}{\sqrt{5 + 16t^2 - 16t}}\,;\, a_N = 8\dfrac{1}{\sqrt{5 + 16t^2 - 16t}}$

Exercice 9. Mouvement hélicoïdal.
1. $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\vec{e}_z$
$\vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + h\ddot{\theta}\vec{e}_z$
2. $\tan\alpha = \dfrac{h}{a}$
3. si $\dot{\theta} = \omega$ alors $\vec{a} = -a\omega^2\vec{e}_r$
$R = \dfrac{\omega^2(a^2 + h^2)}{a\omega^2}$

Exercice 10. Vitesse et accélération en coordonnées sphériques.
1. voir cours
2. voir cours
3. voir cours
4. $\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{cases}$
$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta) \end{cases}$
5. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{a} = \begin{array}{l} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r \\ +(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\theta \\ +(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\sin\theta\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi \end{array}$$