Repérage d'un point - Vitesse et accélération

Exercice 1. Coordonnées cartésiennes.
Une particule se déplace avec une accélération donnée par $\mathbf{a} = \exp(-t)\,\mathbf{i} + 5\sin(t)\,\mathbf{j} - 3\cos(t)\,\mathbf{k}$ en coordonnées cartésiennes. À $t = 0\,s$, la particule est située en $(1;0;3)$, sa vitesse est alors $(1;2;-1)$. Déterminer la vitesse et la position de la particule quel que soit t.

Exercice 2. Accélération dépendant de la vitesse.
Un mobile animé d'une vitesse $\mathbf{v_0} = v_0\,\mathbf{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\mathbf{a} = -kv^2\,\mathbf{i}$; k est une constante et v la vitesse instantanée.
1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$.
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x, la vitesse est $v = v_0\,e^{-kx}$.

Exercice 3. Accélération dépendant de la position.
Une particule, initialement au repos en x_0, se déplace rectilignement avec une accélération $a = -\dfrac{k}{x^2}$ $(k > 0)$. Calculer la vitesse de la particule au point d'abscisse x.

Exercice 4. Torpille.
Un Navire N est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{v}$, le long d'une droite D. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\mathbf{NS},\mathbf{v})$ a la valeur α, T étant animée d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\mathbf{u}$.
1. Faire un schéma.
2. Quelle doit être la valeur de l'angle de tire $\theta = (\mathbf{u}, \mathbf{SN})$ si l'on veut couler N ?
3. Si l'on veut que T atteigne N en un temps minimum, à quel instant, c'est à dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (on donnera la relation entre α et θ). Calculer la valeur de l'angle de tir θ correspondante.

Exercice 5. Course automobile.
Deux pilotes amateurs prennent le départ d'une course automobile sur un circuit présentant une longue ligne droite au départ. Ils s'élancent de la même ligne. Le premier, A, démarre avec une accélération constante de $4\,m.s^{-2}$, le deuxième, B, a une voiture légèrement plus puissante et démarre avec une accélération constante $5\,m.s^{-2}$. A a cependant plus de réflexes que B et démarre une seconde avant.
1. Quelle durée faudra-t-il à B pour rattraper A ?
2. Quelle distance auront-ils parcourue quand B doublera A ?
3. Quelles seront leurs vitesses à cet instant-là ?

Exercice 6. Mouvement rectiligne.
Un automobiliste se rend en voiture à une distance $d = 1\,km$. La route est rectiligne. L'automobiliste part à $t = 0$; Le mouvement est uniformément accéléré ($a = 3\,m.s^{-2}$) jusqu'à $t = t_1$, puis uniforme de vitesse constante v_{max} pendant une durée τ et enfin uniformément retardé $(-a)$ jusqu'à $t = T$. La vitesse moyenne est de $72\,km.h^{-1}$.
1. Tracer le graphe $v(t)$.
2. En raisonnant sur le graphe, montrer que $d = \dfrac{v_{max}}{2}(T + \tau)$.
3. Établir les expressions de la vitesse dans les différentes phases du mouvement et en déduire que $2\,t_1 = T - \tau$.
4. Calculer alors τ et v_{max}.

Exercice 7. Distance de sécurité.
Deux automobilistes se déplacent sur une portion droite d'autoroute. A un instant pris comme origine des temps, le conducteur de la première voiture veut freiner pour ne pas heurter celle située devant lui et évoluant à une vitesse constante v_2, lorsqu'il constate que ses freins ne fonctionnent plus. La seule décélération de la voiture provient alors des frottements et on admettra qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse suivant une loi du type $\mathbf{a} = -\alpha\,v^2\,\mathbf{e_x}$. A l'instant $t = 0$, la première voiture a une vitesse v_1 et est située en $x = 0$ à une distance d de la seconde voiture.
1. Établir, pour la première voiture, les expressions de la vitesse v et de la distance x parcourue en fonction du temps.
2. En déduire la relation entre v et x.
3. Établir, pour la deuxième voiture, l'expression de $x_2(t)$.
4. Calculer le temps t_0 pour lequel la distance entre les deux voitures $X(t) =$

$x_2(t) - x(t)$ est minimale.
5. En déduire alors la distance minimale de sécurité que le conducteur de la première voiture doit respectée pour éviter la collision.
A.N. : $v_1 = 160\,km.h^{-1}$, $v_2 = 90\,km.h^{-1}$, $\alpha = 3.10^{-3}\,m^{-1}$.

Exercice 8. Trajectoire parabolique.
Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps $x = 2\,t$ et $y = 4\,t\,(t-1)$.
1. Déterminer l'équation de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse à l'instant t.
3. Montrer que le mouvement a une accélération constante dont on déterminera les composantes tangentielle et normale.

Exercice 9. Mouvement hélicoïdal.
Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz. Ses équations horaires sont $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ et $z = h\,\theta$. a est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection $\mathbf{OM}'$ de $\mathbf{OM}$ sur Oxy.
1. Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.
2. Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.
3. Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre et est parallèle au plan Oxy. Calculer le rayon de courbure.

Exercice 10. Vitesse et accélération en coordonnées sphériques.
On notera (ρ,φ,z) les coordonnées cylindriques et (r,θ,φ) les coordonnées sphériques.
1. Rappeler comment sont définies les coordonnées cylindriques et sphériques et placer les vecteurs de base sur un ou plusieurs schémas.
2. Déterminer dans la base cylindriques l'expression des vecteurs $\dfrac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$ et $\dfrac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}$.
3. En déduire l'expression générale des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.
4. Décomposer les vecteurs $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_\varphi$ dans la base cylindrique. Déterminer l'expression des vecteurs $\dfrac{d\mathbf{e_r}}{dt}$, $\dfrac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$, $\dfrac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}$ dans la base cylindrique puis dans la base sphérique.
5. En déduire l'expression générale des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées sphériques.