Changements de référentiel

Table des matières

1 Référentiel

1.1 Définitions

La description d'un mouvement est **relative** : elle dépend de celui qui observe le mouvement.

Pour décrire un mouvement, il faut donc préciser l'observateur ou encore le référentiel.

Un référentiel est l'ensemble d'un repère (spatial) lié à un solide de référence et d'une chronologie dans ce repère.

Peut-être considéré comme solide, tout système dont les distances mutuelles des éléments restent invariables au cours du temps.

Le solide de référence est immobile pour l'observateur comme si l'observateur faisait partie du solide.
L'origine et les vecteurs de base restent donc immobiles dans la description du mouvement, indépendants du temps.

1.2 Exemple

Pour un observateur immobile sur le quai, le solide de référence est le quai, notons le référentiel correspondant $\mathcal{R}_1$.
Pour un observateur immobile dans un train, le solide de référence est le train, notons le référentiel correspondant $\mathcal{R}_2$.
Quelle est la vitesse d'un passager (repéré par M) qui se déplace dans le train ?
La réponse sera différente selon l'observateur.

Dans un problème où interviennent plusieurs référentiels, il faudra toujours préciser par rapport à quel référentiel on travaille.

$\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = \left(\dfrac{d\,\mathbf{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}$ est la vitesse du passager par rapport au quai.
$\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2} = \left(\dfrac{d\,\mathbf{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2}$ est la vitesse du passager par rapport au train.
Quand on dérive par rapport à $\mathcal{R}_1$, O_1 et les vecteurs de la base de $\mathcal{R}_1$ sont considérés comme indépendants du temps puisque immobiles par rapport à $\mathcal{R}_1$ par définition.
Quand on dérive par rapport à $\mathcal{R}_2$, O_2 et les vecteurs de la base de $\mathcal{R}_2$ sont considérés comme indépendants du temps puisque immobiles par rapport à $\mathcal{R}_2$ par définition.

2 Vecteur rotation

Soit $\mathcal{R}_1$ un référentiel de base $(\mathbf{e}_{x_1},\mathbf{e}_{y_1},\mathbf{e}_{z_1})$ et $\mathcal{R}_2$ un référentiel de base $(\mathbf{e}_{x_2},\mathbf{e}_{y_2},\mathbf{e}_{z_2})$ en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}_1$.

2.1 Dérivée d'un vecteur par rapport au temps

Soit $\mathbf{A}(t)$ un vecteur quelconque.
Exprimons $\mathbf{A}(t)$ dans la base de $\mathcal{R}_2$ et dérivons par rapport à $\mathcal{R}_1$:

$$\mathbf{A}(t) = A_{x_2}\mathbf{e}_{x_2} + A_{y_2}\mathbf{e}_{y_2} + A_{z_2}\mathbf{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \dot{A}_{x_2}\mathbf{e}_{x_2} + \dot{A}_{y_2}\mathbf{e}_{y_2} + \dot{A}_{z_2}\mathbf{e}_{z_2} + A_{x_2}\dot{\mathbf{e}}_{x_2} + A_{y_2}\dot{\mathbf{e}}_{y_2} + A_{z_2}\dot{\mathbf{e}}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + A_{x_2}\dot{\mathbf{e}}_{x_2} + A_{y_2}\dot{\mathbf{e}}_{y_2} + A_{z_2}\dot{\mathbf{e}}_{z_2}$$

Exprimons les vecteurs $\dot{\mathbf{e}}_{x_2}$, $\dot{\mathbf{e}}_{y_2}$, $\dot{\mathbf{e}}_{z_2}$, qui caractérisent le mouvement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$, dans la base de $\mathcal{R}_2$:

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{x_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = a_{11}\mathbf{e}_{x_2} + a_{12}\mathbf{e}_{y_2} + a_{13}\mathbf{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{y_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = a_{21}\mathbf{e}_{x_2} + a_{22}\mathbf{e}_{y_2} + a_{23}\mathbf{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{z_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = a_{31}\mathbf{e}_{x_2} + a_{32}\mathbf{e}_{y_2} + a_{33}\mathbf{e}_{z_2}$$

La base étant orthonormée :

$$\mathbf{e}_{x_2}^2 = \|\mathbf{e}_{x_2}\|^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2\,\mathbf{e}_{x_2}.\frac{d\mathbf{e}_{x_2}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; a_{11} = 0$$

de même $a_{22} = a_{33} = 0$

$$\mathbf{e}_{x_2}.\mathbf{e}_{y_2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\mathbf{e}_{x_2}}{dt}.\,\mathbf{e}_{y_2} + \mathbf{e}_{x_2}.\frac{d\mathbf{e}_{y_2}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; a_{12} + a_{21} = 0 \;\Rightarrow\; a_{12} = -a_{21} = r$$

de même $a_{23} = -a_{32} = p$ et $a_{31} = -a_{13} = q$

Finalement, trois paramètres p, q, r suffisent à caractériser le mouvement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$; ces trois paramètres définissent le **vecteur rotation** :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = p\,\mathbf{e}_{x_2} + q\,\mathbf{e}_{y_2} + r\,\mathbf{e}_{z_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{x_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = r\,\mathbf{e}_{y_2} - q\,\mathbf{e}_{z_2} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_{x_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{y_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = -r\,\mathbf{e}_{x_2} + p\,\mathbf{e}_{z_2} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_{y_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{z_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = q\,\mathbf{e}_{x_2} - p\,\mathbf{e}_{y_2} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_{z_2}$$

Finalement

$$\boxed{\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{A}}$$

2.2 Cas particuliers

2.2.1 Translation

Si $\mathcal{R}_2$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_1$, les axes de $\mathcal{R}_2$ gardent une direction fixe par rapport à ceux de $\mathcal{R}_1$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{x_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{e}_{y_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{e}_{z_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; p = q = r = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}}$$

2.2.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Si $\mathcal{R}_2$ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}_1$ par exemple $\mathbf{e}_{z_1} = \mathbf{e}_{z_2} = \mathbf{e}_z$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{x_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \omega\,\mathbf{e}_{y_2}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{e}_{y_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = -\omega\,\mathbf{e}_{x_2}$$

ce qui implique $r = \omega$ et $p = q = 0$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$$

Dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe, le vecteur rotation est porté par l'axe et a pour norme la vitesse angulaire.

2.3 Composition des vecteurs rotation

Soient $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_3} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{A}$$

$$= \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_3} + (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}) \wedge \mathbf{A}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

remarque : $\left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} - \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{A}$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}$$

3 Composition des vitesses et des accélérations

3.1 Vitesse d'entraînement

$$\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\,\mathbf{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}$$

$$= \left(\frac{d\,\mathbf{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\,\mathbf{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}$$

$$= \mathbf{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}$$

$$\boxed{\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2} + \mathbf{v}_e}$$

avec $\mathbf{v}_e$ appelé **vitesse d'entraînement** :

$$\boxed{\mathbf{v}_e = \mathbf{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}}$$

Pour calculer $\mathbf{v}_e$ on peut aussi « immobiliser » M dans $\mathcal{R}_2$ en notant M^* la position correspondante :

$$\mathbf{v}(M^*)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{v}(M^*)_{\mathcal{R}_2} + \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_e$$

La **vitesse d'entraînement** peut aussi se calculer comme la vitesse par rapport à $\mathcal{R}_1$ de M^* appelé point coïncident.

3.2 Accélérations d'entraînement et de Coriolis

$$\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}$$

$$= \left(\frac{d\,\mathbf{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\,\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}\right)_{\mathcal{R}_1}$$

Calculons les trois termes séparément

$$\left(\frac{d\,\mathbf{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1}$$

$$\left(\frac{d\,\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}$$

$$= \mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}\right)_{\mathcal{R}_1} = \frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \mathbf{O_2M} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\frac{d\,\mathbf{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1}$$

$$= \frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \mathbf{O_2M} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left[\left(\frac{d\,\mathbf{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}\right]$$

$$= \frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \mathbf{O_2M} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left[\mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}\right]$$

En rassemblant les résultats

$$\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}_2} + \mathbf{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \mathbf{O_2M} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M})$$

$$+2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}$$

L'**accélération d'entraînement** est définie comme l'accélération par rapport à $\mathcal{R}_1$ du point coïncident M^*.

$$\mathbf{a}(M^*)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{0} + \mathbf{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \mathbf{O_2M}$$

$$+\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M}) + \mathbf{0} = \mathbf{a}_e$$

$$\boxed{\mathbf{a}_e = \mathbf{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} + \frac{d\,\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \mathbf{O_2M} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{O_2M})}$$

L'accélération par rapport à $\mathcal{R}_1$ est donc égale à l'accélération par rapport à $\mathcal{R}_2$ + l'accélération d'entraînement + un troisième terme appelé **accélération de Coriolis** :

$$\boxed{\mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}_1} = \mathbf{a}(M)_{\mathcal{R}_2} + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{v}(M)_{\mathcal{R}_2}}$$

3.3 Cas particuliers

3.3.1 Translation

Si $\mathcal{R}_2$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_1$, les axes de $\mathcal{R}_2$ gardent une direction fixe par rapport à ceux de $\mathcal{R}_1$ et :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_e = \mathbf{v}(O_2)_{\mathcal{R}_1} \quad \mathbf{a}_e = \mathbf{a}(O_2)_{\mathcal{R}_1} \quad \mathbf{a}_c = \mathbf{0}}$$

3.3.2 Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Si $\mathcal{R}_2$ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe de $\mathcal{R}_1$ par exemple $\mathbf{e}_{z_1} = \mathbf{e}_{z_2} = \mathbf{e}_z$ $(O_1 = O_2 = O)$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OH} + \mathbf{HM} = r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{OM} = \omega\,\mathbf{e}_z \wedge (r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z) = r\omega\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \mathbf{OM}) = \omega\,\mathbf{e}_z \wedge (\omega\,\mathbf{e}_z \wedge (r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z)) = -r\omega^2\,\mathbf{e}_r$$

Résultats que l'on retrouve facilement en utilisant le point coïncident.